Gráfok színezése – Színezési problémák

Oktató: Hajnal Péter

Jegyzetelő: Rácz Anna Mária

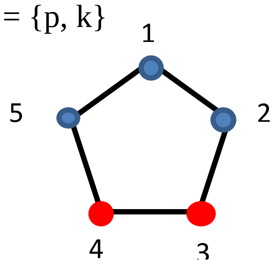
Definíció. G gráf (csúcs)színezés, azaz a gráf csúcsaihoz színeket rendelünk.

$\sigma : V(G) \rightarrow P$ paletta

A paletta lehet például P={piros,kék} vagy $\mathbb{N}^+ = \{1,2,3,\ldots\}$.

1. példa $V(G) = \{1,2,3,4,5\}$

$P = \{p, k\}$



$1 \mapsto$ kék
$2 \mapsto$ kék
$3 \mapsto$ piros
$4 \mapsto$ piros
$5 \mapsto$ kék

Definíció. Egy színezés akkor jó, ha két szomszédos csúcsot különböző színnel színezünk ki. Azaz formálisan:

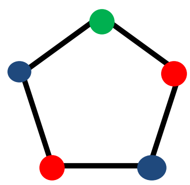
$\forall\ e = xy \in E(G)$ esetén minden e élre (e két végpontja x és y)

$\sigma(x) \neq \sigma(y)$

Pl.: Az első példa nem jó színezést ad.

A második példa jó színezést ad.

$P = \{$piros, kék, zöld$\}$



A két példa gráfja közös, az 5 hosszú kör. Ekkor

- jó színezéshez 3 szín elég
- jó színezés 2 színnel nem oldható meg

Feltesszük (színezési kérdéseknél), hogy egyszerű gráfról beszélünk.

Megjegyzés: Minden csúcs különböző színt kap, mindig jó színezés (feltételünk szerint nincs hurokél).

$\sigma: V(G) \rightarrow P$ 1-1/injektív

Alapkérdés: Milyen kevés színnel tudom G-t jól kiszínezni?

Definíció. A G gráf kromatikus száma k, ha k színnel színezhető, de k – 1 színnel már nem lehet. A kromatikus szám jelölése: $\chi(G)$.

Formálisan:

$\chi(G)$ = G kromatikus száma = min {|P| létezzen б: V → P jó színezés}

Definíció. Az azonos színt kapott pontok halmazát színosztálynak nevezzük.

A színezés felfogható mint a csúcsok színosztályokba sorolása úgy, hogy a színosztályokon belül ne haladjon él.

Alkalmazások:

1. Órarend tervezés

   Megtartandó órák: (X.Y. / 1. A / 1. matek)(X.Y./ 1. A/ 2. matek)
   (X.Y./ 3. D /1. magyar) …
   (Z. K. / 4. C / történelem) …

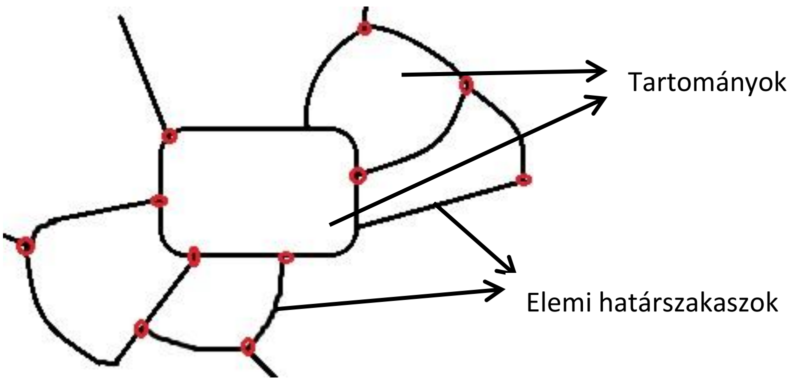
   Konfliktusok:

   (X.Y. / 1. A / 1. matek) és (X.Y. / 5. B / 1. fizika) → nem lehet egyszerre
   (X.Y./1. A /1. matek) és (Z. K. / 1. A / 2. magyar) → nem lehet egyszerre

   A gráfon a csúcsok a megtartandó órák; az élek a konfliktusok. P={időpontok}

2. Térképszínezési problémák

   Adott T térkép, ahol a térképen lévő országok megfeleltethetőek a gráf tartományainak, az elemi határszakaszok pedig a gráf éleinek.



T tartományai halmaza jelölés: $\tau(T)$. Két tartomány szomszédos, ha közös határszakaszuk van.

б: $\tau(T)$ → P (szomszédos tartományok különböző színt kapjanak)

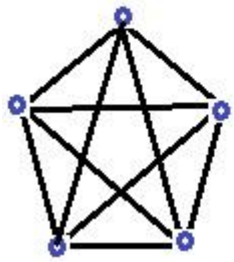
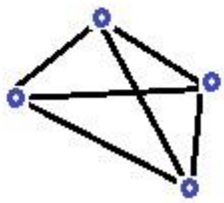
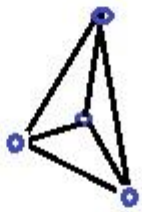
Észrevétel: 4 szín mindig elég! „Legalábbis úgy tűnik" → De Morgan, Cayley elismert matematikusok, kik népszerűsítik a problémát.

Definíció. Térkép egy G gráf lerajzolva, amelyre:

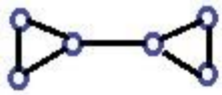
- lerajzolt gráf él átmetszés nélkül „szép lerajzolás”
- minden él két oldalán két különböző tartomány van

Példák:

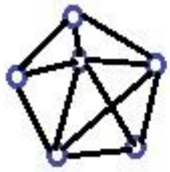
K_5 K_4 K_4

nem szép lerajzolás nem szép lerajzolás szép lerajzolás



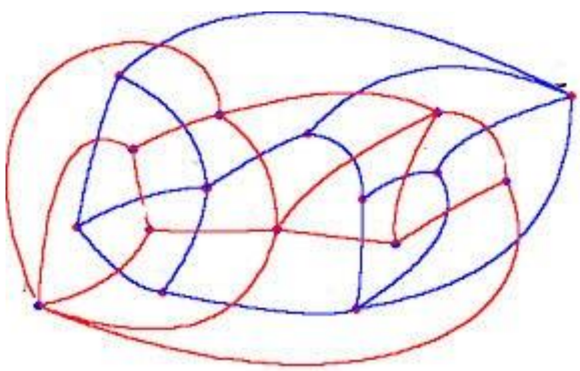
Nem térkép, mert nem minden él oldalán van 2 különböző tartomány



Nem térkép

Definíció. T térkép → T* duális gráf

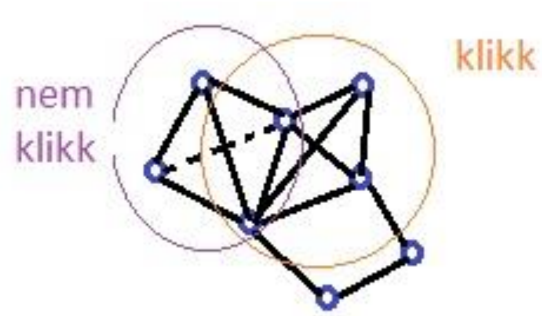
- ∀ tartományba főváros/csúcs
- ∀ élre határátkelő; a fővároshoz egy-egy (egybeolvadó)országút/él
- Térkép tartomány színezése ≡ duális gráf jó színezése



Sejtés ≡ Ha G szépen rajzolt egyszerű gráf, akkor $\chi(G) \leq 4$

Tétel. (Négy- szín-tétel) Minden síkbarajzolható egyszerű G gráf kiszínezhető 4 színnel, azaz $\chi(G) \leq 4$.

Definíció. $K \subseteq V(G)$ csúcshalmaz **klikk,** bármely két K-beli csúcs között van él,azaz összekötött.



Észrevétel: - $\sigma: V(G) \rightarrow P$ (színek paletta mérete)

jó színezés

- K klikk => K elemei különböző P-beli színeket kell kapjanak => $|P| \geq |K|$

Egy síkgráfban nem lehet 5 elemű klikk, mert K_5 –nek nincs szép lerajzolása. 5 elemű klikk hiánya esetén azonban elképzelhető, hogy a jó színezéshez 5 vagy több szín kell.